



دبیرستان فرهنگ شهید شریفی

ریاضی و آمار ۳

فصل ۳

درس ۳

تابع نمایی



در یک بازی با توجه به قوانین موجود امتیازهای زیر کسب می شود

فکر می کنید در مرحله ششم، بازیکن چند امتیاز خواهد گرفت؟

۷۲۹

در کدام مرحله، میزان امتیازات کسب شده ۶۵۶۱ خواهد شد؟

۸

آیا اعداد این جدول، الگویی را مشخص می کند؟ بین تعداد مراحل بازی و میزان امتیازات کسب شده، رابطه ای به دست آورید.

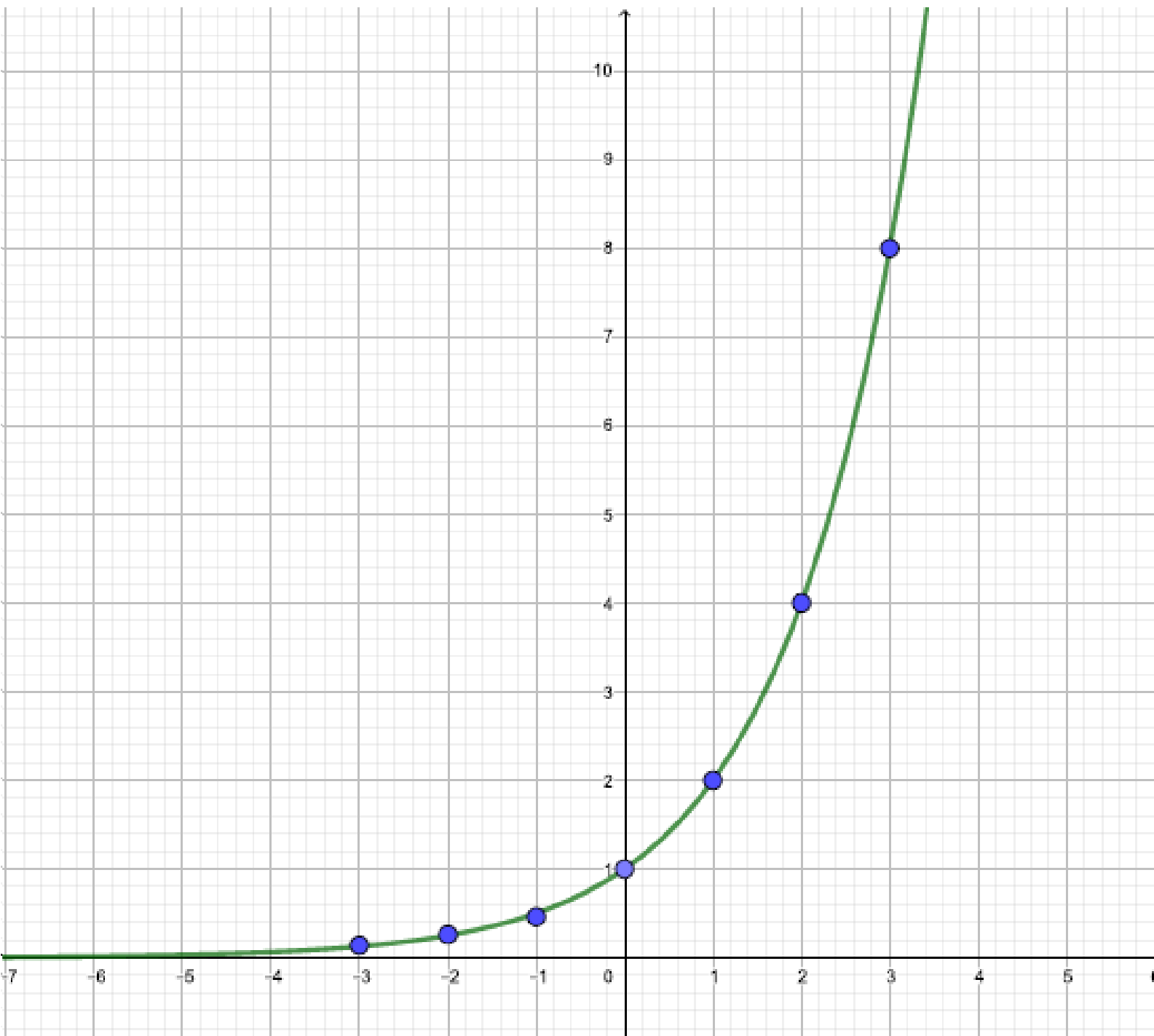
در هر مرحله میزان امتیازها سه برابر مرحله قبل است.
یا امتیاز هر مرحله برابر است با سه به توان شماره مرحله

$$3^n = \text{مرحله } n \text{ ام}$$

تعداد مراحل بازی	میزان امتیازهای کسب شده
۰	$3^0 = ۱$
۱	$3^1 = ۳$
۲	$3^2 = ۹$
۳	$3^3 = ۲۷$
۴	?
?	۲۴۳
۶	?
۷	?
۸	?
۹	?
۱۰	?

نمودار $y = 2^x$ را رسم کنید

x	$y = 2^x$
۳	۸
۲	۴
۱	۲
۰	۱
-۱	۰/۵
-۲	۰/۲۵
-۳	۰/۱۲۵



هر تابع به صورت $y = a^x$ ، که a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است، یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

تذکر: حرف a معرف پایه و حرف x معرف نما یا توان است. با نمادهای تعریف شده در سال دهم برای یک تابع، می‌توان تابع نمایی f را به صورت زیر تعریف کرد:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

منظور از $\mathbb{R}^+$ ، مجموعه $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ است.

تابع‌های زیر تابع نمایی هستند

$$y = 2^x$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$y = 2^{x+1}$$

$$y = 3^x$$

$$y = \sqrt{3}^x$$

$$y = 3^{x-1}$$

$$f(x) = 5^x$$

$$f(x) = 0.15^x$$

$$f(x) = 5^x + 2$$

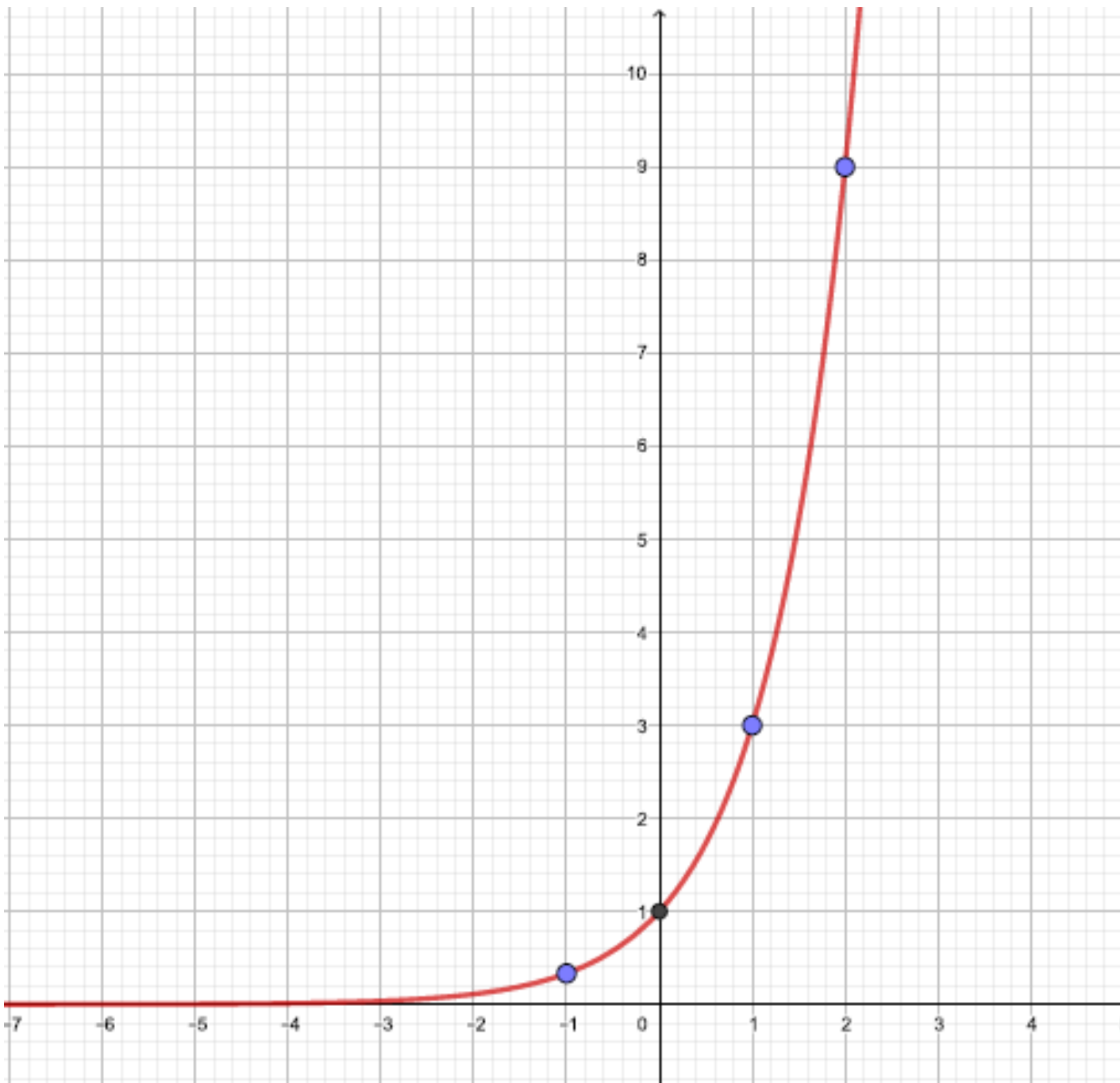
نمودار $y = 3^x$ را رسم کنید

x	$y = 3^x$
۳	۲۷
۲	۹
۱	۳
۰	۱
-۱	۰/۳۳
-۲	۰/۱۱
-۳	۰/۰۳

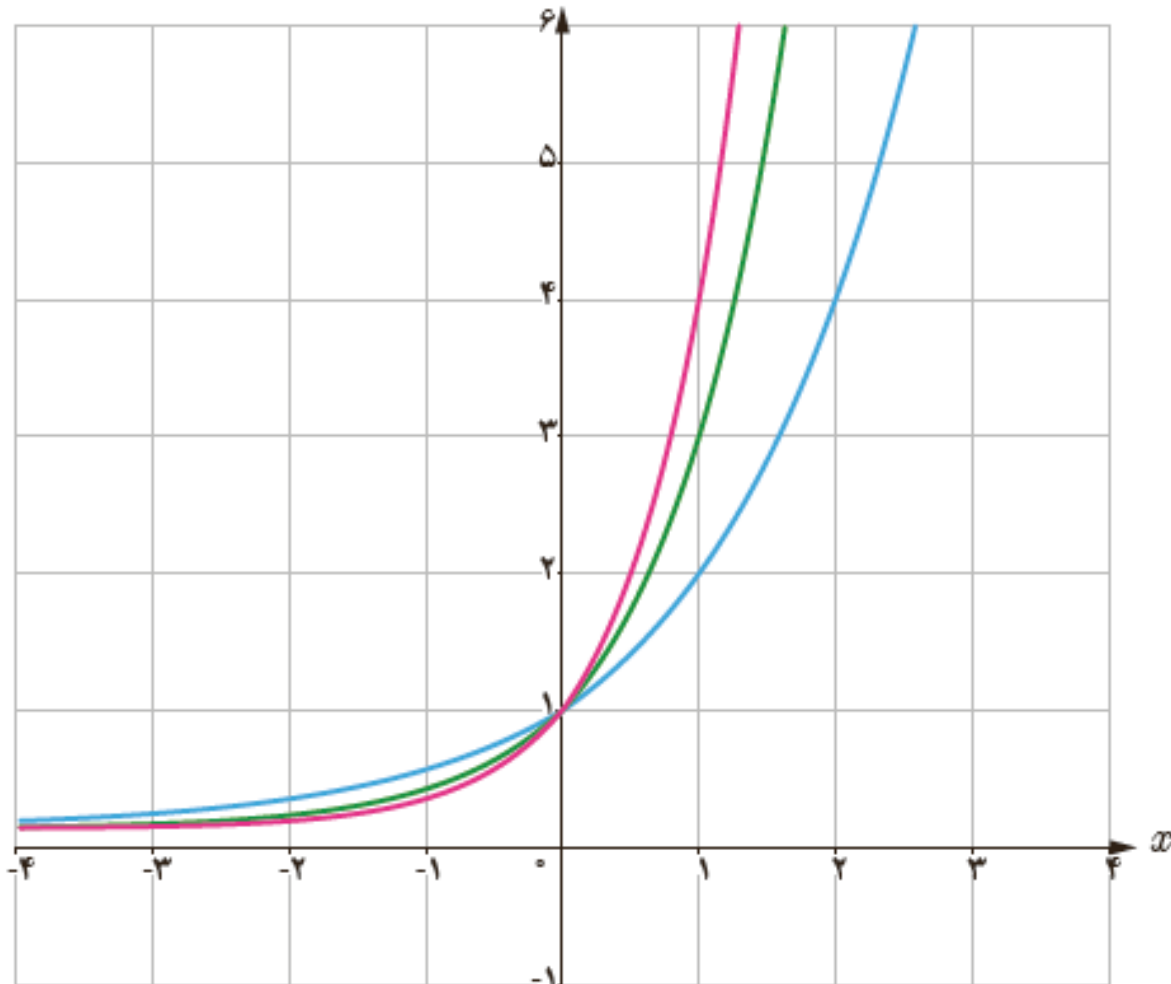
همان‌گونه که دیده می‌شود، نمودار تابع $y = 3^x$ در نقطه یک محور y ها را قطع می‌کند.

ب) با استفاده از نمودار تابع $y = 3^x$ ، مقدار تقریبی عدد $3^{\frac{5}{2}}$ را به دست آورید.

۱۵/۶



پ) نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 3^x$ و $y = 4^x$ را در یک دستگاه رسم کرده‌ایم. ابتدا مشخص کنید کدام نمودار بیانگر هر یک از توابع فوق است. سپس، تفاوت‌ها و شباهت‌های بین این سه تابع را بیان کنید.



$$y = 4^x$$

صورتی

$$y = 3^x$$

سبز

$$y = 2^x$$

آبی

تشابه: هر سه نمودار افزایشی هستند و از نقطه $(0, 1)$ می‌گذرند

برای x های مثبت نمودار صورتی بالاتر است ولی برای x های منفی نمودار آبی بالاتر است

در نمودار تابع نمایی با پایه بزرگتر از ۱ هر چه قدر پایه بزرگتر شود نمودار به محور عرضها نزدیکتر می‌شود

تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را در نظر بگیرید و با استفاده از ماشین حساب، جدول زیر را کامل کنید.

محاسبه y با ماشین حساب تا سه رقم اعشار			
x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	y	
-۲	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	۴	۴
$-\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$	$2\sqrt{2}$	۲/۸۲۸
-۱	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	۲	۲
$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{2}$	۱/۴۱۴

محاسبه y با ماشین حساب تا سه رقم اعشار

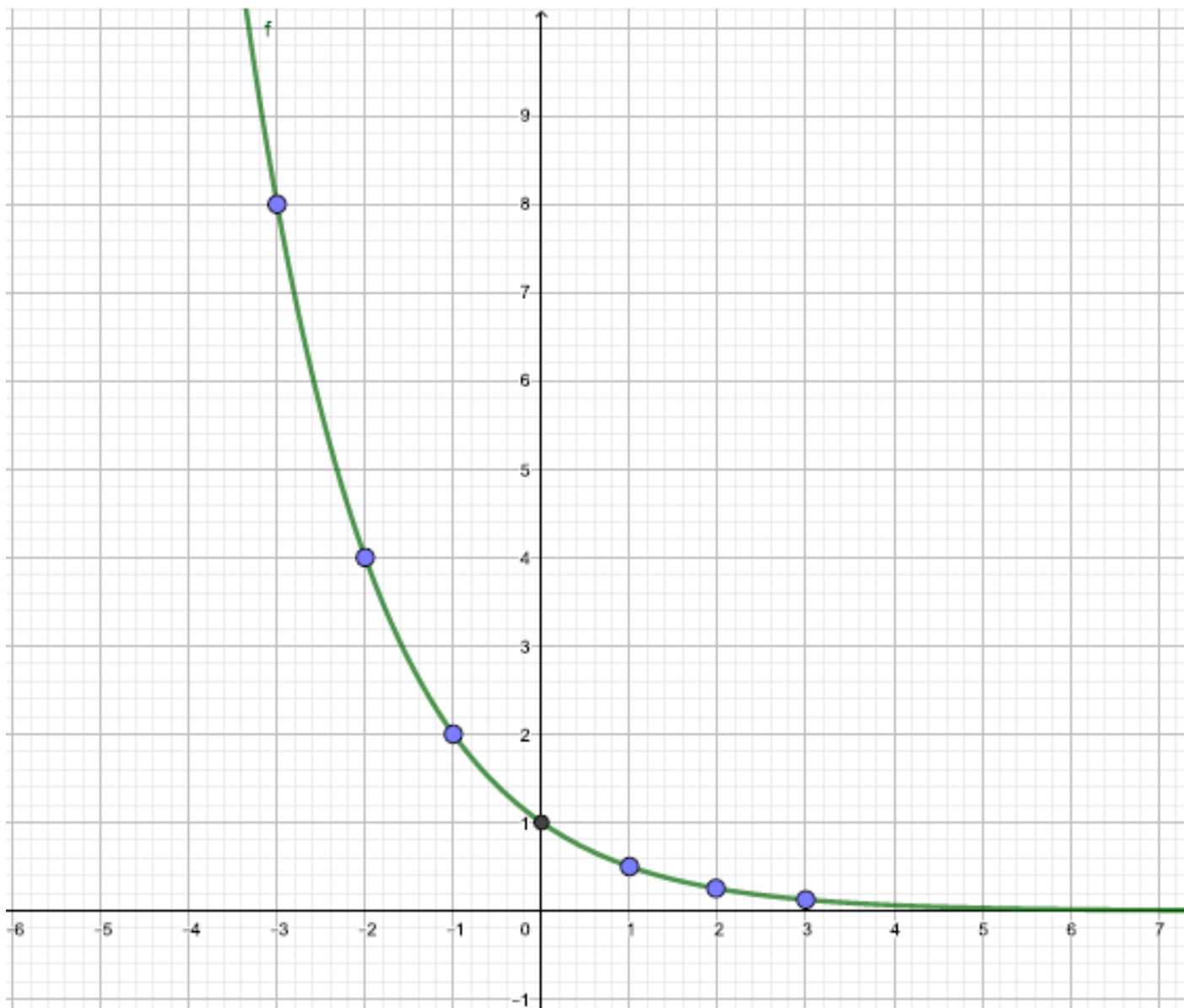
x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	y
۰	$\left(\frac{1}{2}\right)^0$	۱
$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
۱	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
۲	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{4}$

نقاط به دست آمده در جدول بالا را روی صفحه مختصات به دست آورید و به هم وصل کنید. آیا می توانید به کمک نمودار،

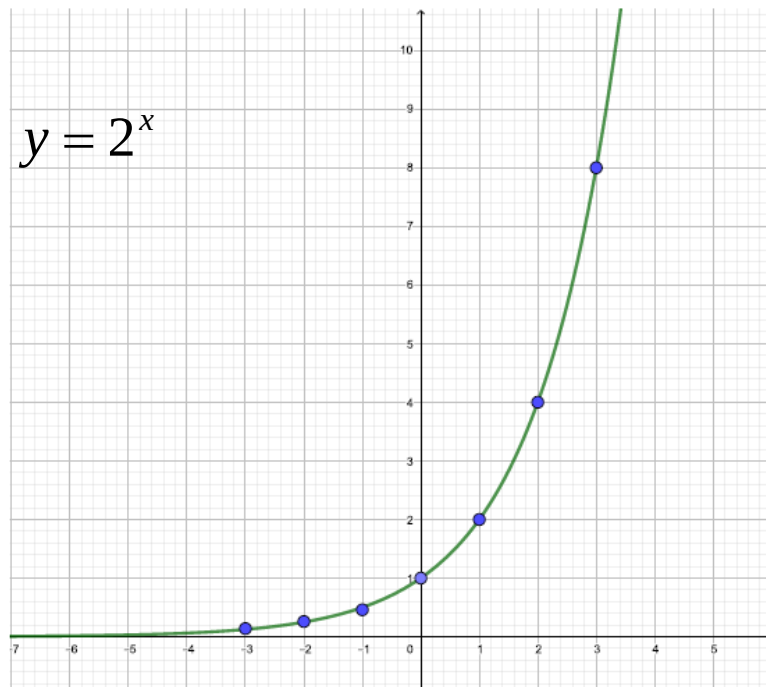
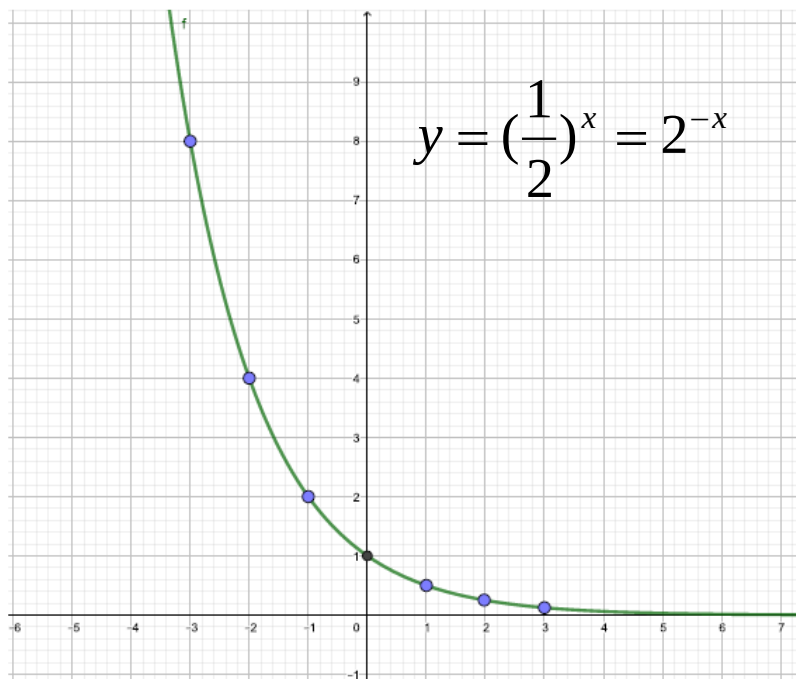
مقدار تابع $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ را برای هر عدد دلخواه x حدس بزنید؟

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$$

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$
3	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
0	1
-1	2
-2	4
-3	8



۳. نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را با نمودار تابع $y = 2^x$ که در فعالیت‌های قبلی رسم کرده بودید، مقایسه کنید. چه تفاوت اساسی بین این دو نمودار ملاحظه می‌کنید؟

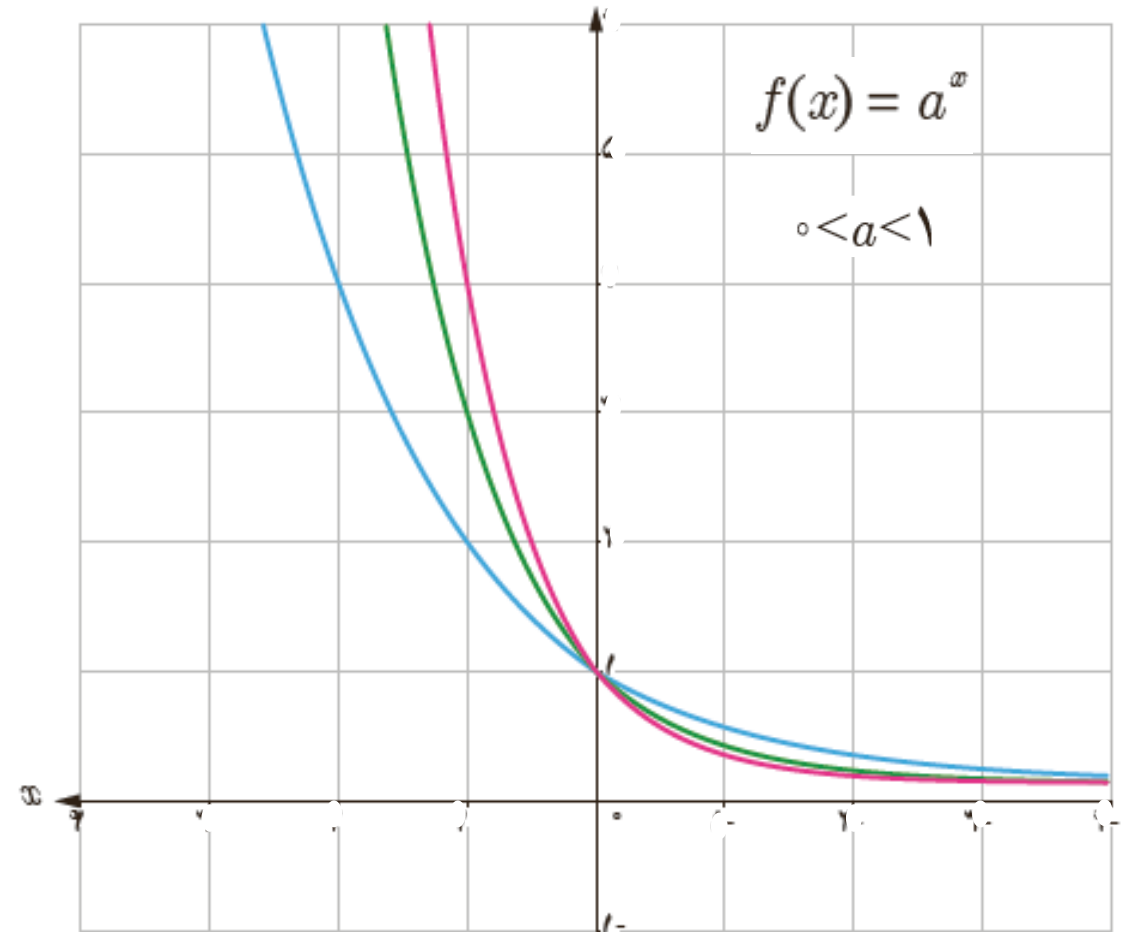
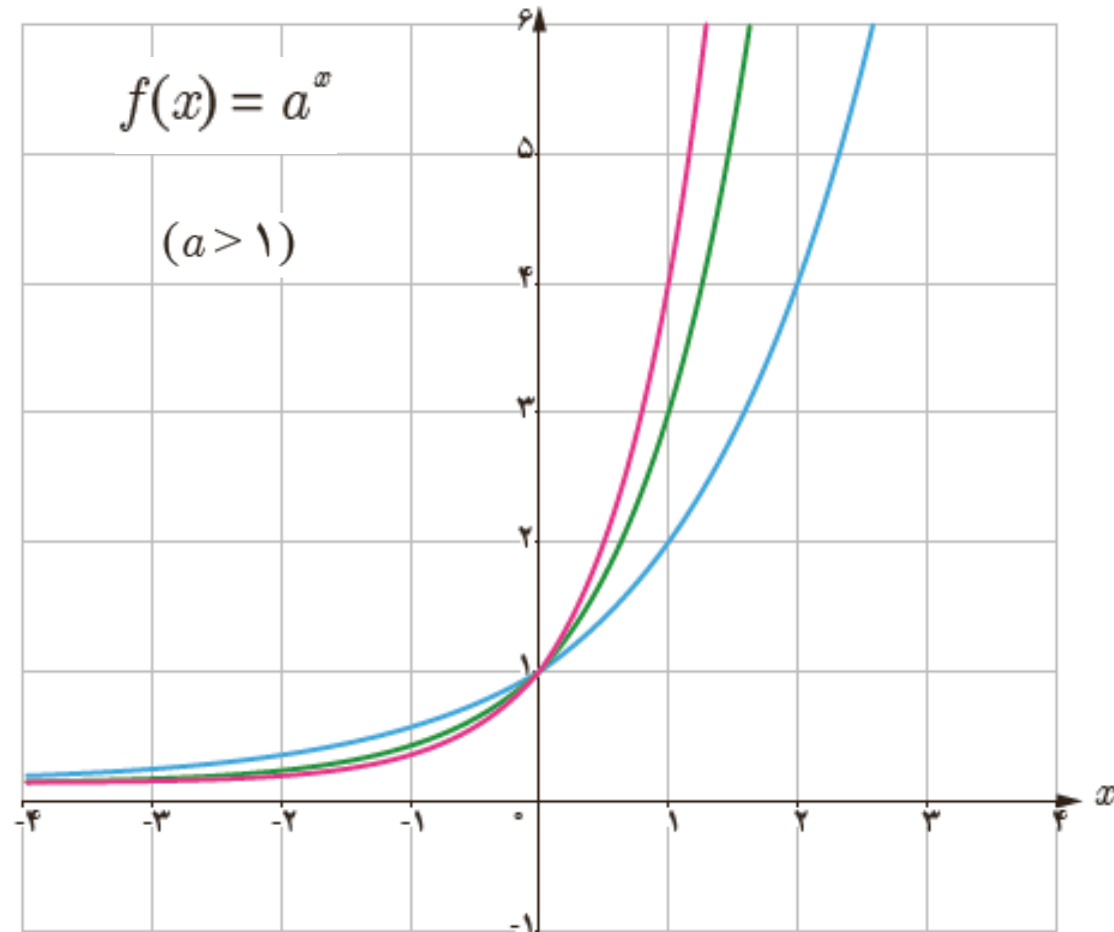


افزایشی است

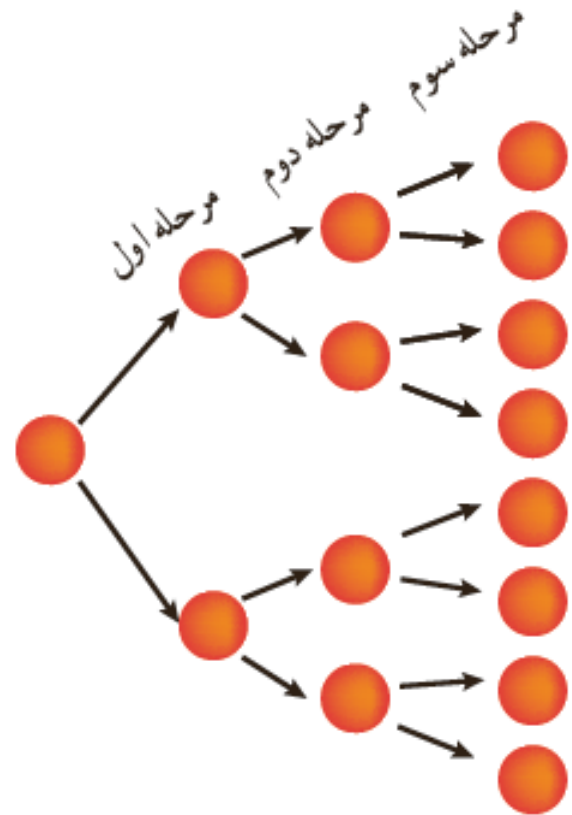
کاهشی است

در تابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد، وقتی x بزرگ می‌شود، مقدار y کم می‌شود و برای x ‌های کوچک‌تر از صفر، با کاهش مقدار x مقدار y به سرعت افزایش پیدا می‌کند.

تابع نمایی $f(x) = a^x$ را در نظر بگیرید. با انتخاب عدد a ($a > 1$)، نمودار $f(x)$ را رسم کنید. نمودار $g(x) = (\frac{1}{a})^x$ را در همان صفحه مختصات رسم کنید. دو نمودار حاصل را با هم مقایسه کنید.



۱. در پژوهشکدهٔ رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول‌های بنیادی جنین انسان تولید می‌شود. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب و ماهیچهٔ قلب را به‌وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است.



اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل بالا، ادامه پیدا کند :

الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده 2048 سلول خواهد شد؟ پاسخ : ۱۱ مرحله

ب) در مرحلهٔ هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟ پاسخ : ۲۵۶

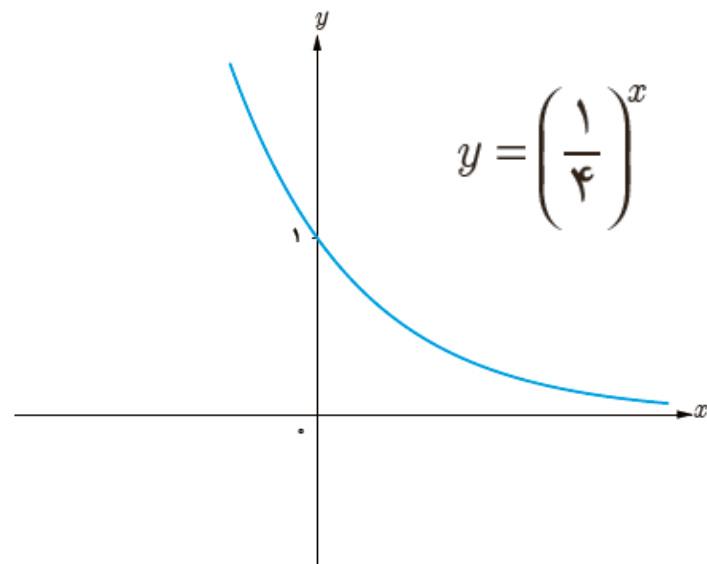
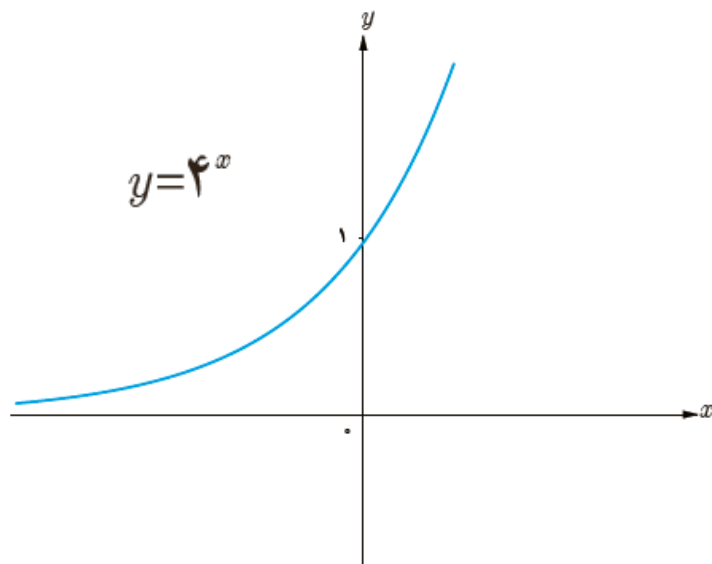
پ) آیا می‌توانید الگویی برای تکثیر سلول‌ها مشخص کنید؟

در هر مرحله تعداد سلول‌ها دو برابر تعداد سلول‌های مرحله قبل است.

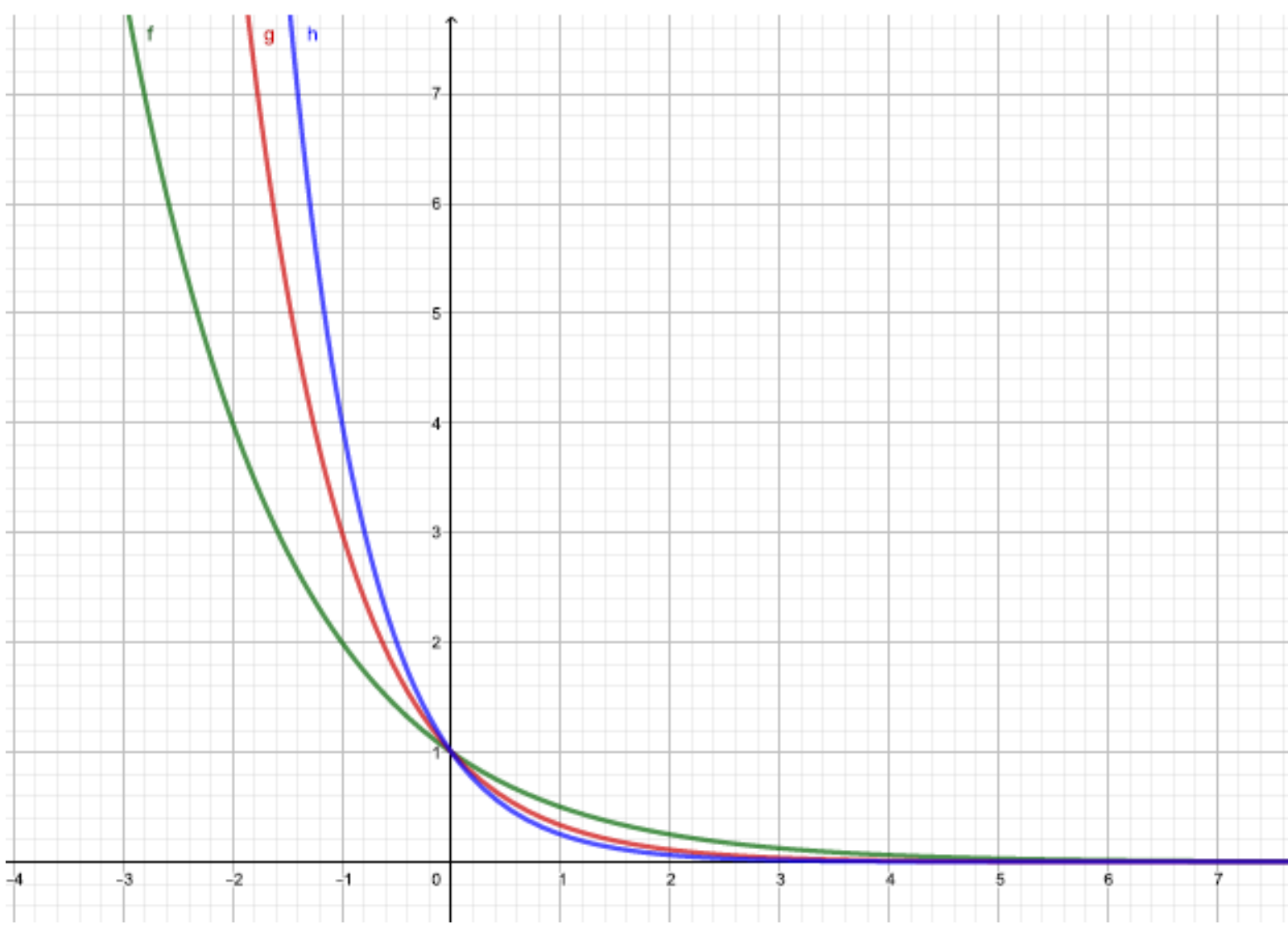
۲. یک نمونه واقعی (شبیه به تمرین یک) بیان کنید که از الگوی تابع نمایی پیروی کند.

پاسخ: در تصفیه آب، داخل فیلترها، لایه تمیز کننده‌ای قرار دارد که حدود یک چهارم از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند بنابراین سه چهارم ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. اکنون اگر در هر مرحله یک فیلتر اضافه کنیم ناخالصی‌های باقی مانده در هر مرحله از الگوی تابع نمایی تابع $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ پیروی می‌کند.

۳. در شکل صفحه بعد، نمودار دو تابع $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ و $y = 4^x$ رسم شده است. مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است.

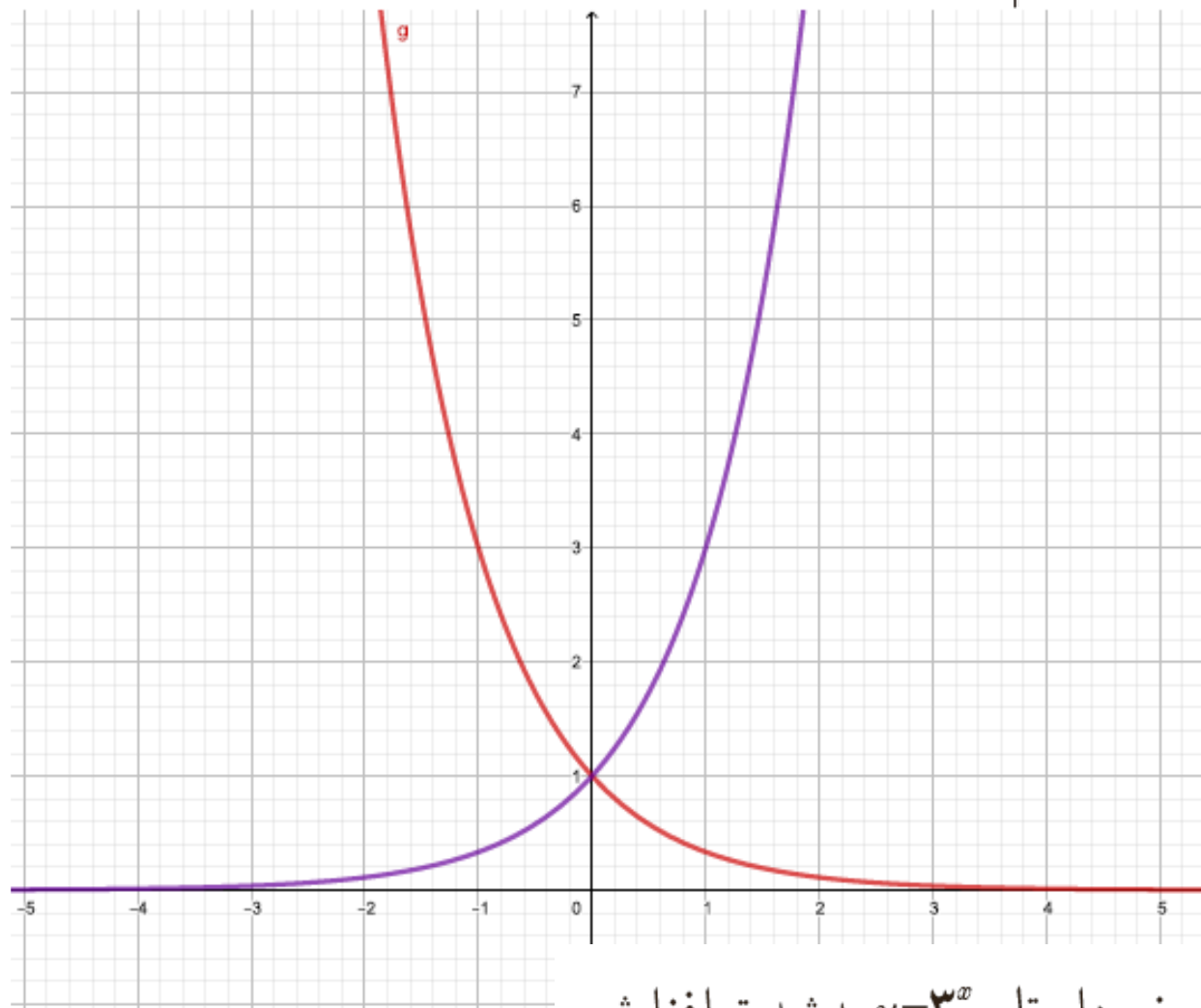


۴. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ را در یک دستگاه (صفحه مختصات) رسم کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آنها را برشمرید.



- $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 
- $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 
- $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 

۵. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = 3^x$ را در یک دستگاه رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.



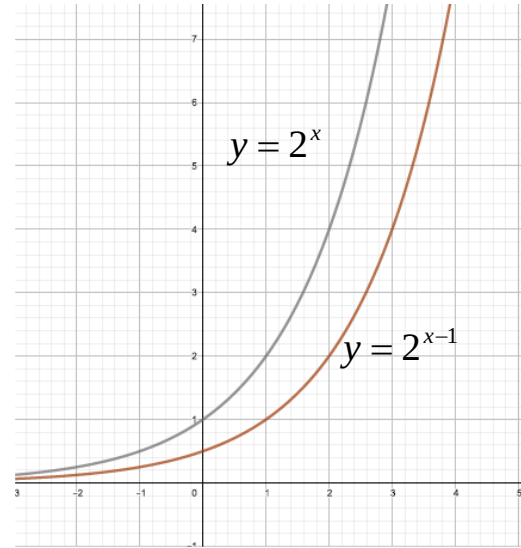
پاسخ: نمودار این دو تابع نسبت به محور عرض‌ها قرینه یکدیگرند. نمودار تابع $y = 3^x$ به شدت افزایشی

و نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ به شدت کاهش‌ی است.

رسم به کمک انتقال

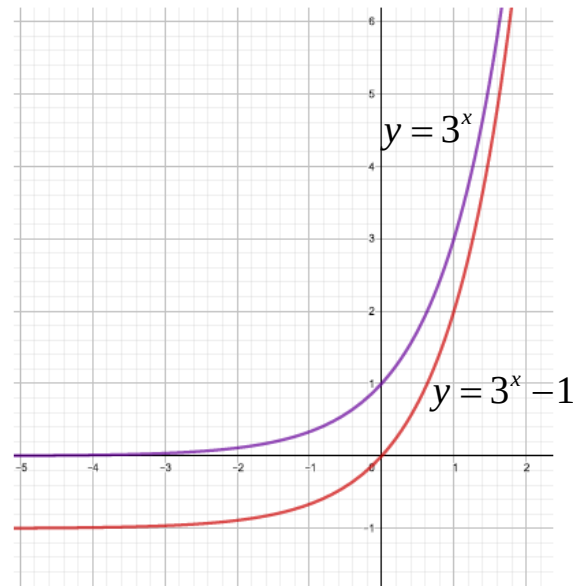
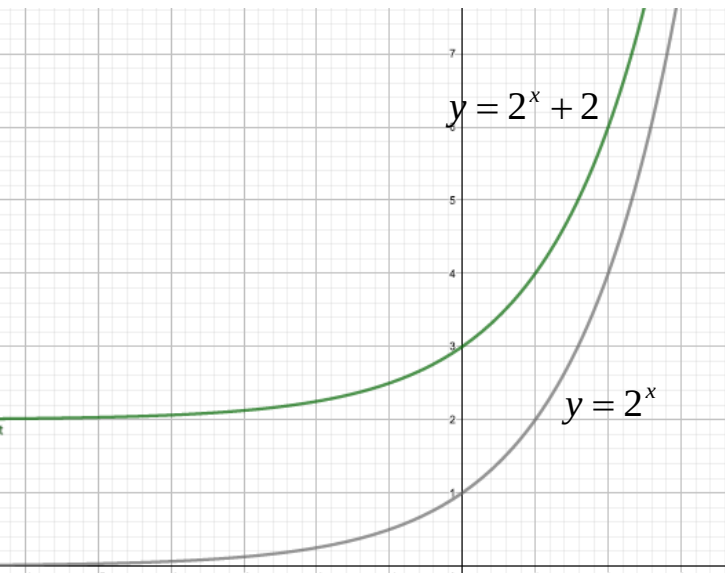
رسم $y = a^{x+n}$ به کمک نمودار $y = a^x$

کافی است نمودار $y = a^x$ را $-n$ واحد روی x ها جابه جا کنیم



رسم $y = a^x + m$ به کمک نمودار $y = a^x$

کافی است نمودار $y = a^x$ را m واحد روی y ها جابه جا کنیم



رشد نمایی

اگر مقدار اولیه کمیتی مثل سرمایه، جمعیت و ... با آهنگ ثابتی در حال اضافه شدن باشد مثلاً ۱۰ درصد در سال یا ۲۰ درصد در سال یا ۲ درصد در ماه یا ۱ درصد در روز یا یک مساله رشد داریم مقدار درصد گفته شده را بر ۱۰۰ تقسیم می کنیم و با r نمایش می دهیم و زمان سپری شده را با t نمایش دهیم و مقدار اولیه c باشد مقدار سرمایه بعد زمان t از رابطه زیر پیدا می شود

$$f(t) = c(1 + r)^t$$

پدر احسان قصد دارد مبلغ ده میلیون تومان برای او سرمایه گذاری کند. او، تصمیم گرفته است که این مبلغ را در یک شرکت تولیدکننده کالای ایرانی سرمایه گذاری کند. این شرکت اعلام کرده است که در پاسخ به اعتماد سرمایه گذاران به فعالیت های تولیدی اش، در پایان هر سال، ۱۴ درصد سود علی الحساب به آنان پرداخت خواهد کرد.

$$r = \frac{14}{100} = 0.14$$

میزان موجودی احسان را دو سال بعد به دست آورید

$$f(2) = c(1 + r)^2 = 10000000(1 + 0.14)^2 = 10000000(1.14)^2 = 12996000$$

$$f(6) = c(1 + r)^6 = 10000000(1 + 0.14)^6 = 10000000(1.14)^6 = 21949726$$

میزان موجودی را ۶ سال بعد به دست آورید

اگر در سوال فقط چند برابر شدن سرمایه مورد سوال باشد کافی است مقدار $(1 + r)^t$ را به دست آوریم

در ابتدای سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیت کره زمین حدود ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۲ درصد در سال باشد، پس از ۳۰ سال جمعیت کره زمین به چند میلیارد نفر خواهد رسید؟ پس از ۳۵ سال، ۷۰ سال و ۱۰۵ سال جمعیت کره زمین چه میزان خواهد شد؟ با توجه به محاسبات بالا، آیا می‌توانید وضع جمعیت کره زمین را در هر دوره زمانی ۳۵ ساله مقایسه کنید؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

میلیارد نفر $۹/۴۲۰ = ۵/۲(۱+۰/۰۲)^{۳۰}$ جمعیت کره زمین پس از ۳۰ سال
 میلیارد نفر $۱۰/۴۰۰ = ۵/۲(۱+۰/۰۲)^{۳۵}$ جمعیت کره زمین پس از ۳۵ سال
 میلیارد نفر $۲۰/۷۹۷ = ۵/۲(۱+۰/۰۲)^{۷۰}$ جمعیت کره زمین پس از ۷۰ سال
 میلیارد نفر $۴۳/۹۹۲ = ۵/۲(۱+۰/۰۲)^{۱۰۵}$ جمعیت کره زمین پس از ۱۰۵ سال

$$r = \frac{2}{100} = 0/02$$

نکته : اگر دقت کنید بعد از ۳۵ سال جمعیت ۲ برابر شده ؛ بعد از ۷۰ سال (دو تا ۳۵ سال) جمعیت ۴ برابر و بعد از ۱۰۵ سال (سه تا ۳۵ سال) ۸ برابر شده است نتیجه :

اگر مقدار اولیه بعد از k سال دو برابر شود و زمان سپری شده n تا k سال بگذرد (kn سال) مقدار اولیه برابر می‌شود 2^n

مثال : سرمایه ای هر ۱۵ سال دو برابر می‌شود بعد از ۶۰ سال این سرمایه چند برابر می‌شود

$$60 = 4 \times 15$$

$$2^4 = 16 = \text{چند برابر شدن}$$

زوال نمایی

اگر مقدار تابع پس از گذشت زمان کاهش یابد، به آن مسئله زوال می‌گوییم. حال اگر تابع مورد نظر تابع نمایی باشد، می‌توان صحبت از زوال نمایی کرد.

معادله کلی زوال نمایی، به فرم $f(t) = c(1 - r)^t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان نزول برحسب اعشار و t بیانگر زمان است.

مثال: جمعیت کشوری، در سال ۲۰۰۰ میلادی حدود چهل میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۱۸ میلادی چند نفر خواهد بود؟

حل: با جای گذاری c ، r و t در معادله کلی زوال نمایی، جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۸ میلادی برابر است با:

$$y = 40,000,000 (1 - 0.01)^{18} = 3,338,600$$

۱. در یکی از فعالیت های بخش اول این درس، به یک شرکت تولیدکننده محصولات فرهنگی اشاره کردیم. اگر یکی از سهام داران این شرکت، در سال ۱۳۹۷ مبلغ چهل میلیون تومان در این شرکت سرمایه گذاری کند، پس از ده سال چه مبلغی به سرمایه این سهام دار اضافه خواهد شد؟

پاسخ:

$$\text{سرمایه پس از ده سال} = 40,000,000 \times 1/141^{\circ} = 148,288,852$$

$$\text{افزایش سرمایه پس از ده سال} = 148,288,852 - 40,000,000 = 108,288,852$$

۲. جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

پاسخ:

$$\text{جمعیت شهر پس از ده سال} = 1,000,000 \times 1/061^{\circ} = 17,908,476$$

۳. جزیره‌ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه‌ها با موش‌ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش‌ها ۲۳۵۷۶ بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ ۲/۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه‌ها ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ ۱/۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.

الف) در یک جدول، جمعیت موش‌ها را در ۱۰ سال متوالی به دست آورید.

$$r = \frac{2/5}{100} = \frac{25}{1000} = 0/025$$

$$1 - r = 1 - 0/025 = 0/975$$

جمعیت موش‌ها پس از	
یک سال	$23786 \times 0/975^1 = 23191$
دو سال	$23786 \times 0/975^2 = 22611$
سه سال	$23786 \times 0/975^3 = 22046$
چهار سال	$23786 \times 0/975^4 = 21495$
پنج سال	$23786 \times 0/975^5 = 20957$
شش سال	$23786 \times 0/975^6 = 20433$
هفت سال	$23786 \times 0/975^7 = 19922$
هشت سال	$23786 \times 0/975^8 = 19424$
نه سال	$23786 \times 0/975^9 = 18939$
ده سال	$23786 \times 0/975^{10} = 18465$

ب) همین کار را برای جمعیت گربه‌ها طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید.

جمعیت گربه‌ها پس از	
یک سال	$۱۵۷۸۶ \times ۱/۰۱۸ = ۱۶۰۷۰$
دو سال	$۱۵۷۸۶ \times ۱/۰۱۸^۲ = ۱۶۳۵۹$
سه سال	$۱۵۷۸۶ \times ۱/۰۱۸^۳ = ۱۶۶۵۳$
چهار سال	$۱۵۷۸۶ \times ۱/۰۱۸^۴ = ۱۶۹۵۳$
پنج سال	$۱۵۷۸۶ \times ۱/۰۱۸^۵ = ۱۷۲۵۸$
شش سال	$۱۵۷۸۶ \times ۱/۰۱۸^۶ = ۱۷۵۶۹$
هفت سال	$۱۵۷۸۶ \times ۱/۰۱۸^۷ = ۱۷۸۸۵$
هشت سال	$۱۵۷۸۶ \times ۱/۰۱۸^۸ = ۱۸۲۰۷$
نه سال	$۱۵۷۸۶ \times ۱/۰۱۸^۹ = ۱۸۵۳۵$
ده سال	$۱۵۷۸۶ \times ۱/۰۱۸^{۱۰} = ۱۸۸۶۹$

$$r = \frac{1/8}{100} = \frac{18}{1000} = 0/018$$

$$1 + r = 1 + 0/018 = 1/018$$

پ) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه‌ها بیشتر از موش‌ها می‌شود؟
پاسخ : سال دهم

ت) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش‌ها و گربه‌ها با یکدیگر برابر می‌شود؟
پاسخ : در سال نهم (یکی از روزهای سال) جمعیت موش‌ها و گربه‌ها با یکدیگر برابر می‌شوند.

ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه‌ها و موش‌ها چه اتفاقی می‌افتد؟
پاسخ : جمعیت موش‌ها رو به نابودی می‌رود و جمعیت گربه‌ها افزایش می‌یابد.

۱ در کدام یک از جدول‌های زیر، تابع داده شده نمایشی است؟

x	۱	۲	۳	۴	۵
$f(x)$	۱	۳	۹	۲۷	۸۱

$$y = 3^{x-1}$$

x	۱	۲	۳	۴	۵
$f(x)$	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵

$$y = x^3$$

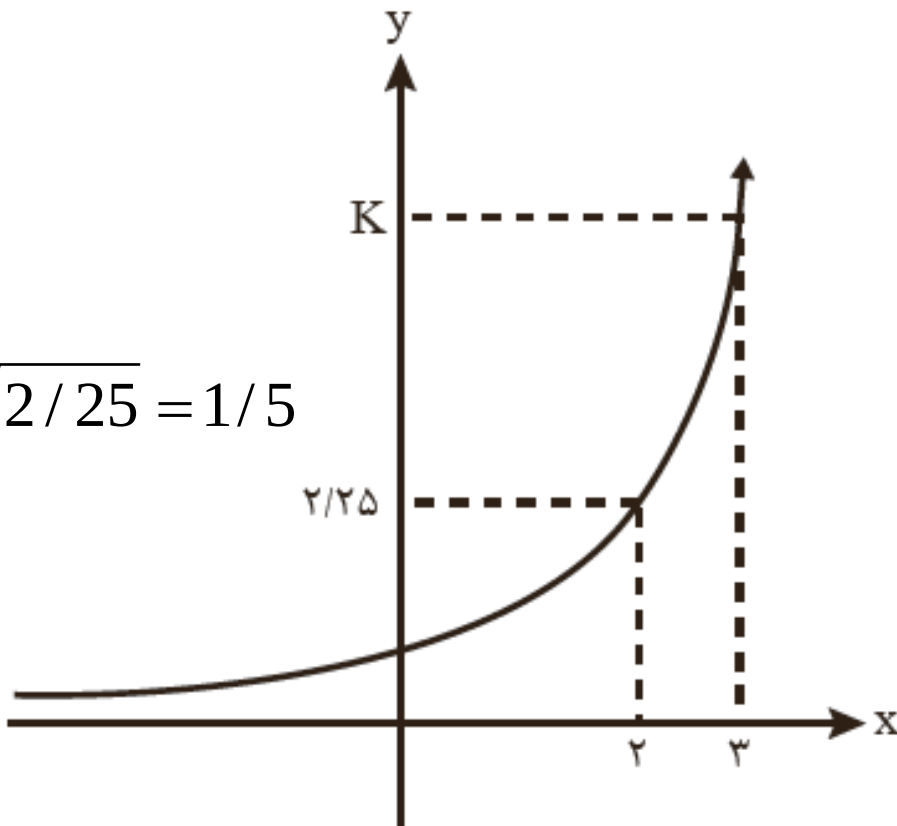
۲ اگر در تابع نمایی با ضابطه $f(x)=a^x$ داشته باشیم $f(2)=32$ در این صورت مقدار a را مشخص کنید.

$$32 = a^2 \rightarrow a = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

۳ اگر نمودار تابع نمایی $f(x)=a^x$ به صورت زیر باشد مقدار k را مشخص کنید.

$$f(2) = 2/25 \rightarrow 2/25 = a^2 \rightarrow a = \sqrt{2/25} = 1/5$$

$$f(x) = 1/5^x \rightarrow k = 1/5^3 = 1/125$$



۴ اگر $f(x) = a^x$ و $f(2) = 10$ باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $f(8) + f(4)$

ب) $3f(1) + 2f(0)$

$$f(2) = 10 \rightarrow 10 = a^2 \rightarrow a = \sqrt{10} \rightarrow f(x) = \sqrt{10}^x$$

$$f(8) = \sqrt{10}^8 = 10^4 = 10000$$

$$f(4) = \sqrt{10}^4 = 10^2 = 100$$

$$f(8) + f(4) = 10100$$

$$f(1) = \sqrt{10}^1 = \sqrt{10}$$

$$f(0) = \sqrt{10}^0 = 1$$

$$3f(1) + 2f(0) = 3\sqrt{10} + 2(1) = 3\sqrt{10} + 2$$

ا نرخ افزایش قیمت لوازم التحریری در ایران سالی 10% است. تعیین کنید دو سال دیگر خودکار 50 تومانی چه قیمتی خواهد داشت؟

$$r = \frac{10}{100} = 0.1$$

$$t = 2$$

$$c = 50$$

$$f(t) = c(1+r)^t \rightarrow f(2) = 50(1+0.1)^2 = 50(1.1)^2 = 50(1.21) = 60.5$$