

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی آمار ۳

فصل ۳

درس ۲

ریشه نام و توان گویا



دیرستان
فرهنگستان
شهر
یفتی منطقه ۱۶

دیرستان

دیرستان

دیرستان : اصغر قیاسی

$$1) a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n \quad n \in N, n \geq 2$$

$$2) a^1 = a$$

$$3) a^0 = 1 \quad a \neq 0 \quad 0^0 = \text{تعریف نشده}$$

$$4) a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad a \neq 0 \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad a \neq 0, b \neq 0$$

$$5) a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$6) a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$7) a^n \div a^m = a^{n-m}$$

$$8) a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$9) (a^n)^m = (a^m)^n = a^{mn}$$

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$4^2 = \boxed{64}$$

$$(2)^{-7} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$$

$$73^1 = \boxed{73}$$

$$(-3)^6 = \boxed{729}$$

$$-3^6 = \boxed{-729}$$

$$(0.01)^5 = \frac{1}{100^5} = \frac{1}{10^{10}} = 10^{-10}$$

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^0 = \boxed{1}$$

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت عدد توان‌دار بنویسید

$$(-36)^7 \div 9^7 = \left(\frac{-36}{9}\right)^7 = (-4)^7$$

$$(2/1)^6 \times \left(\frac{2}{1}\right) \times \left(2\frac{1}{1}\right)^4 = (2/1)^6 \times (2/1) \times (2/1)^4 = (2/1)^{11}$$

$$(-4)^3 \times (-5)^3 = \boxed{20^3}$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^5 \div \left(\frac{4}{7}\right)^8 = \left(\frac{4}{7}\right)^{5-8} = \left(\frac{4}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{4}\right)^3$$

$$(10^6)^8 = \boxed{10^{48}}$$

همان طور که می دانید، اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ ریشه های دوم عدد a هستند.
به عبارت دیگر، ریشه های دوم عدد a همان ریشه های معادله درجه دوم $x^2 = a$ هستند.

برای مثال، ریشه های دوم عدد ۱۶ ریشه های معادله $x^2 = 16$ می باشند پس ۴ و -۴ یا $\sqrt{16}$ و $-\sqrt{16}$ ریشه های دوم عدد ۱۶ هستند.
ریشه سوم عدد حقیقی مانند a ، ریشه معادله $x^3 = a$ است. برای مثال، ریشه سوم عدد ۲۷، ریشه معادله $x^3 = 27$ است که برابر ۳ می باشد.
ریشه پنجم عدد -۳۲، پاسخ معادله $x^5 = -32$ است که برابر -۲
ریشه های ششم عدد ۶۴، ریشه های معادله $x^6 = 64$ هستند که برابر ۲ و -۲ می باشند.

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه n ام عدد a می نامیم، هرگاه: $b^n = a$.

$a \geq 0$	n زوج باشد	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$ ریشه n ام a
	n فرد باشد	$\sqrt[n]{a}$ ریشه n ام a
$a < 0$	n زوج باشد	ریشه ندارد
	n فرد باشد	$\sqrt[n]{a}$ ریشه n ام a

در حالت کلی تر، درباره ریشه های n ام ($n \in \mathbb{N}$) عددی مانند a می توان گفت:

با توجه به اینکه $\sqrt{a^2} = |a|$ و $\sqrt[3]{a^3} = a$ این رابطه در حالت کلی نیز برای هر $n \geq 2$ برقرار است؛ یعنی:

n زوج است $\sqrt[n]{a^n} = |a|$
 n فرد است $\sqrt[n]{a^n} = a$

$$\sqrt[5]{(-\frac{8}{3})^5} = -\frac{8}{3} \text{ و } \sqrt[10]{(-15)^{10}} = |-15| = 15$$

توان کسری

برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد حقیقی مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

در این کتاب اگر $a < 0$ ، $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف نمی‌کنیم. برای مثال، عبارت‌هایی مانند $(-2)^{\frac{1}{2}}$ و $(-1)^{\frac{1}{3}}$ را تعریف نمی‌کنیم. همچنین، هر جا عبارت‌های $a^{\frac{1}{n}}$ بیان می‌شود، a را عددی مثبت در نظر می‌گیریم.

هرگاه $a > 0$ ، برای دو عدد طبیعی n و m ، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{بنابراین، } a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

همچنین $a^{-\frac{m}{n}}$ نیز به این صورت تعریف می‌شود:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

$$3^{\frac{2}{3}} = 3^{2 \times \frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$$

$$7^{\frac{5}{4}} = 7^{5 \times \frac{1}{4}} = (7^5)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$$

هر یک از عبارت‌های توانی زیر را به صورت رادیکالی و عبارت‌های رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید.

$$5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$$

$$6^{\frac{7}{9}} = \sqrt[9]{6^7}$$

$$12^{-\frac{2}{11}} = \frac{1}{12^{\frac{2}{11}}} = \frac{1}{\sqrt[11]{12^2}}$$

$$\left(2\frac{1}{3}\right)^{-\frac{8}{3}} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{8}{3}} = \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{7}\right)^8}$$

$$(0/001)^{\frac{14}{4}} = (0/001)^{\frac{7}{2}} = \sqrt{(0/001)^7} = 0/001^3 \sqrt{0/001}$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{3}{7}\right)^8} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{7}\right)^6 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \sqrt[3]{\left(\frac{3}{7}\right)^2}$$

$$3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$$

$$7^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{7}$$

$$\sqrt[3]{25} = \begin{cases} 25^{\frac{1}{3}} \\ \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$\sqrt[12]{2/7} = 2/7^{\frac{1}{12}}$$

$$(0/31)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0/31}$$

$$\sqrt[4]{1} = 1$$

سهام‌داران یک شرکت تولیدکننده محصولات فرهنگی از مدیر عامل این شرکت خواستند که جهت برنامه‌ریزی برای توسعه شرکت گزارش عملکرد شرکت طی سال‌های قبل را ارائه کند. مدیر عامل در جلسه ارائه گزارش اعلام کرد که طی سال‌های قبل، سود سالانه شرکت ۲۰ درصد بوده است و پیش‌بینی کرد که این سود در سال‌های آینده نیز محقق شود.

اگر سرمایه شرکت را ۱۰۰ میلیون تومان، سود سالانه آن را ۲۰٪ و میزان درآمد را در تمام مدت یک سال، یکسان در نظر بگیریم، سهام‌داران شرکت می‌توانند با استفاده از فرمول زیر، سرمایه شرکت را طی سال‌های آینده برآورد کنند:

$$\text{زمان (بر حسب سال)} \rightarrow \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان)} = 100 \times (1/2)^t$$

برای مثال، پس از گذشت یک سال و دو سال به ترتیب می‌توان سرمایه شرکت را به صورت زیر حساب کرد:

$$120 = 100 \times (1/2)^1 = \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان): پس از گذشت یک سال}$$

$$144 = 100 \times (1/2)^2 = \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان): پس از گذشت ۲ سال}$$

سرمایه شرکت در هر یک از زمان‌های خواسته شده به دست آورید.

$$t = 3 \frac{1}{4} \Rightarrow 100 \times (1/2)^{3 \frac{1}{4}} = 100 \times \sqrt[4]{1/2} \quad \text{و} \quad t = 6 \text{ ماه} \Rightarrow 100 \times (1/2)^{\frac{1}{2}} = 100 \times \sqrt{1/2}$$

۲۰۰ روز بعد:

۱ سال و ۲ ماه بعد:

$$t = \frac{200}{365} \Rightarrow 100 \times (1/2)^{\frac{200}{365}}$$

$$t = 1 \frac{2}{12} = 1 \frac{1}{6} = \frac{7}{6} \Rightarrow 100 \times (1/2)^{\frac{7}{6}} = 100 \times \sqrt[6]{1/2^7}$$

حاصل هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید. (a, m و n اعداد حقیقی مثبت اند.)

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \quad 100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10 \quad 125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5} \quad 32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

$$(2 \times 8)^{\frac{1}{3}} = 16^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{16} = 2$$

$$-4(1000)^{\frac{1}{3}} = -4 \times \sqrt[3]{1000} = -4 \times 10 = -40 \quad 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}$$

$$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 3^1 = 3$$

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[5]{4} = \sqrt[3+5]{4} = \sqrt[8]{4} = \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}$$

$$125^{\frac{2}{3}} \div 125^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$$

$$8^{\frac{2}{3}} \times (1/8)^{\frac{2}{3}} =$$

$$(8 \times 1/8)^{\frac{2}{3}} = 1^{\frac{2}{3}} = 1$$

$$\left(\frac{3^4}{2^6}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3^{4 \times \frac{1}{2}}}{2^{6 \times \frac{1}{2}}} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$$

$$5^{\frac{1}{2}} \times 5^{(-\frac{1}{2})} = 5^{\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})} = 5^0 = 1$$

$$8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} =$$

$$(8 \times 2)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

$$(2^6)^{\frac{1}{3}} = 2^{6 \times \frac{1}{3}} = 2^2 = 4$$

$$\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-4} = \frac{a^{-\frac{1}{2} \times (-4)}}{a^{-\frac{1}{4} \times (-4)}} = \frac{a^2}{a^1} = a$$

$$3^{0.25} \times 3^{0.75} = 3^{0.25 + 0.75} = 3^1 = 3$$

$$(m^{\frac{3}{4}} \cdot n^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} (m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}} \times n^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} \times m^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} \times n^{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}} = m^{\frac{3}{2}} \times n^{\frac{1}{2}} \times m^{\frac{1}{2}} \times n^{\frac{3}{2}} = m^{\frac{3}{2}+1} \times n^{1+\frac{3}{2}}$$

$$= m^{\frac{5}{2}} \times n^{\frac{5}{2}} = (m \times n)^{\frac{5}{2}}$$

نکته : می توان فرجه رادیکال را با توان ساده کرد یا برعکس می توان توان و فرجه را در یک عدد طبیعی ضرب کرد

$$\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt[9]{5^6} = \sqrt[3]{5^2}$$

$$\sqrt[3]{6^6} = 6^2 = 36$$

با استفاده از تعریف توان های گویا نشان دهید که $\sqrt{5}$ ، $\sqrt[4]{5^2}$ ، $\sqrt[6]{5^3}$ با هم برابرند.

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[6]{5^3} = 5^{\frac{3}{6}} = 5^{\frac{1}{2}}$$

دانش آموزی $\sqrt[3]{-8}$ را به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نوشت. توضیح دهید که چرا نمایش $\sqrt[3]{-8}$ به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نادرست است.

در این کتاب اگر $a < 0$ ، $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف نمی کنیم.

حل معادله توانی (معادلاتی که متغیر آن در توان باشد)

با استفاده از قوانین توان کاری می کنیم که دو طرف تساوی عبارت هایی با پایه هایی مساوی بشود. سپس توان ها را با هم مساوی می گذاریم سپس معادله را حل می کنیم

$$\textcircled{1} \quad 2^{3x+1} = 128 \xrightarrow{\text{۱۲۸ را تجزیه می کنیم}} 2^{3x+1} = 2^7$$

$$\rightarrow 3x+1=7 \rightarrow 3x=7-1=6 \rightarrow x=\frac{6}{3}=2$$

$$\textcircled{2} \quad 9^{x-2} = 27^{2+x} \rightarrow (3^2)^{x-2} = (3^3)^{2+x} \rightarrow 3^{2x-4} = 3^{4+3x}$$

$$\rightarrow 2x-4=4+3x \rightarrow 2x-3x=4+4$$

$$\rightarrow -x=12 \rightarrow x=-12$$

$$\textcircled{u} 1^{rx+r} \times r^{x-1} = \left(\frac{1}{r}\right)^{rx-1} \rightarrow (r^r)^{rx+r} \times (r^r)^{x-1} = (r^{-1})^{rx-1}$$

$$\rightarrow r^{4x+9} \times r^{rx-2} = r^{-rx+1} \rightarrow r^{1x+7} = r^{-rx+1}$$

$$\rightarrow 1x+7 = -rx+1 \rightarrow 1x+rx = 1-7 \rightarrow 11x = -6 \rightarrow x = \frac{-6}{11}$$

$$\textcircled{v} \left(\frac{v}{a}\right)^{rx+a} = \left(\frac{a}{v}\right)^{x-r} \rightarrow \left(\frac{v}{a}\right)^{rx+a} = \left(\frac{v}{a}\right)^{-x+r}$$

$$\rightarrow rx+a = -x+r \rightarrow rx+x = r-a \rightarrow rx = -r \rightarrow x = \frac{-r}{r}$$

$$\textcircled{a} 1^x \times a^a = v r^a$$

$$\rightarrow 1^x \times a^a = (1 \times a)^a \Rightarrow 1^x \times a^a = 1^a \times a^a \rightarrow 1^x = 1^a \Rightarrow x = a$$

$$\textcircled{4} \quad (0, 34)^{\text{r}} \times (0, 34)^{\text{x}} \times (0, 34)^{-4} = (0, 34)^{\text{v}} \Rightarrow (0, 34)^{\text{x}-4} = (0, 34)^{\text{v}} \\ \Rightarrow \text{x}-4 = \text{v} \Rightarrow \text{x} = 9$$

$$\textcircled{\checkmark} \quad (r^{\text{x}})^4 = \frac{1}{r^{\text{r}}} \Rightarrow r^{4\text{x}} = r^{-\text{r}} \Rightarrow 4\text{x} = -\text{r} \Rightarrow \text{x} = \frac{-\text{r}}{4} = \frac{-1}{\text{r}}$$

$$\textcircled{\wedge} \quad \frac{x^{\omega} \times 1a^{\text{r}}}{\text{r}^{\text{r}} \times \text{r}^{\omega} \times \text{r}} = a^{\wedge} \rightarrow \frac{x^{\omega} \times 1a^{\text{r}}}{\text{r}^{\wedge}} = a^{\wedge} \rightarrow x^{\omega} \times 1a^{\text{r}} = \text{r}^{\wedge} \times a^{\wedge} \\ \rightarrow x^{\omega} \times 1a^{\text{r}} = 1a^{\wedge} \rightarrow x^{\omega} = \frac{1a^{\wedge}}{1a^{\text{r}}} = 1a^{\omega} \rightarrow \text{x} = 1a$$

همان طور که می دانید، حجم کره ای به شعاع r با استفاده از فرمول $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ (v حجم کره) به دست می آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می توان با استفاده از مفهوم ریشه گیری و توان های گویا، شعاع کره ای به حجم v را از فرمول زیر به دست آورد.

$$r = \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{3v}{4\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}} \Rightarrow r = \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ب) شعاع این تانکر کره ای شکل را که حجم آن $\frac{32\pi}{3}$ است، به دست آورید.

$$r = \left(\frac{3 \times \frac{32\pi}{3}}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = (8)^{\frac{1}{3}} = 2$$

اگر D قطر جعبه زیر باشد، اندازه آن از طریق تابع $D = (L^2 + W^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}$ (طول، L عرض و W ارتفاع جعبه) به دست می آید.

الف) با توجه به شکل، اندازه D را به دست آورید.

$$D = (12^2 + 4^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = (144 + 16 + 9)^{\frac{1}{2}} = (169)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{169} = 13m$$

ب) اگر اندازه $L=W=H=1m$ باشد، اندازه D را به دست آورید.

$$D = (1+1+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}m$$