



دنباله هندسی (قسمت سوم) مجموع جملات دنباله هندسی

صفحه ۹۲ و ۹۳ جزوه



دبیر: اصغر قیاسی

مجموع n جمله دنباله هندسی را با استفاده از رابطه های زیر به دست می آید:

$$\text{جمله اول} = a \quad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \rightarrow s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

$$\text{قدر نسبت} = r \quad \text{طرفین را در } r \text{ ضرب می کنیم} \quad rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^n$$

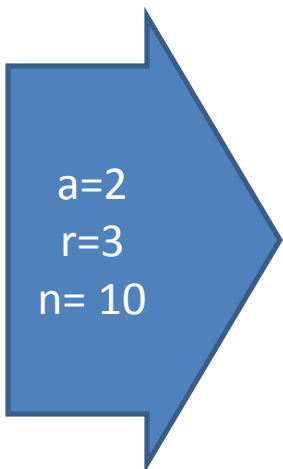
$$\text{تعداد جملات} = n$$

$$\text{جمله n ام} = \text{جمله آخر} = L \quad rs_n - s_n = ar^n - a \rightarrow s_n(r-1) = a(r^n - 1) \rightarrow s_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$\text{مجموع n جمله اول} = s_n$$

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

برای دنباله هندسی ... ، ۱۸ ، ۶ ، ۲ مجموع ۱۰ جمله اول را بیابید



$$s_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \rightarrow s_{10} = \frac{2(3^{10} - 1)}{3 - 1} = \frac{2(3^{10} - 1)}{2} = 3^{10} - 1$$

رابطه دوم مجموع جملات دنباله هندسی:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{ar^n - a}{r - 1} = \frac{ar^{n-1}r - a}{r - 1} = \frac{Lr - a}{r - 1}$$

• هرگاه جمله آخر معلوم بود از این فرمول استفاده می کنیم

$$S_n = \frac{Lr - a}{r - 1}$$

• هرگاه تعداد جملات معلوم بود از این فرمول استفاده می کنیم

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

مثال: حاصل عبارت زیر را بیابید

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + \dots + 256 + 512$$

$$a = \frac{1}{4}, r = 2, L = 512$$

$$S_n = \frac{Lr - a}{r - 1} = \frac{512 \times 2 - \frac{1}{4}}{2 - 1} = \frac{1024 - \frac{1}{4}}{1} = 1024 - \frac{1}{4} = 1024 - 0/25 = 1023/75$$

برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلودرد عفونی است، پزشک معالج قرص های آنتی بیوتیک حامل ۸۰ میلی گرم آنتی بیوتیک تجویز کرد. با توجه به اینکه نیمه عمر این آنتی بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین، این قرص ها را مصرف کند
 الف) دنباله هندسی در نظر بگیرید که جمله های آن مقدار باقیمانده یک قرص در بدن بعد از نیمه عمر باشد a و r را تعیین کنید

ب) S_n مجموع قرص ها بعد از هر مرحله مصرف قرص باشد ضابطه S_n و a_n را تعیین کنید.
 پ) منظور از a_3 و S_3 چیست؟

$$a_n = 80 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad S_n = 80 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \quad \text{الف) } a = 80, \quad r = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = 80 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = 20 \quad \text{پ)}$$

a_3 : میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از دو نیمه عمر است.

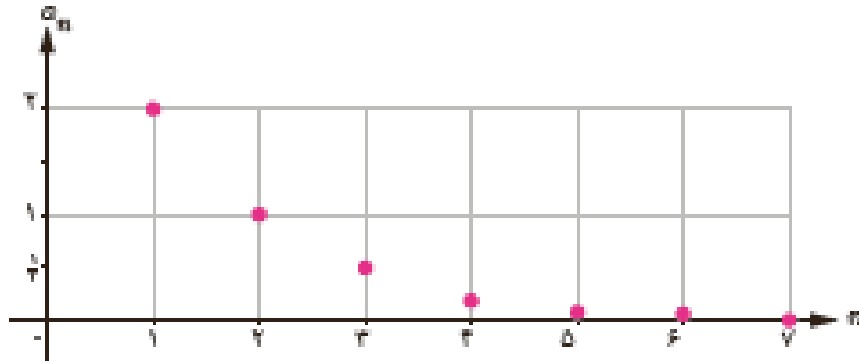
$$S_3 = 80 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3}{1 - \frac{1}{2}} = 80 \times \frac{1 - \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = 140$$

S_3 : میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از سه بار مصرف قرص است.

جملات دنباله	a_1 (جمله اول)	r (نسبت مشترک)	S_n مجموع n جمله اول
$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{2}$	$r = \frac{1}{3}$	$S_5 = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{3})^5)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{121}{162}$ $S_{10} = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{3})^{10})}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{14762}{19683}$
$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{4}$	$r = \frac{1}{4}$	$S_4 = \frac{\frac{1}{4}(1 - (\frac{1}{4})^4)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{255}{768}$ $S_8 = \frac{\frac{1}{4}(1 - (\frac{1}{4})^8)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{65535}{196608}$

جملات دنباله	a_1 (جمله اول)	r (نسبت مشترک)	S_n مجموع n جمله اول
$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \dots$	$a_1 = \frac{2}{5}$	$r = \frac{1}{2}$	$S_3 = \frac{\frac{2}{5}(1 - (\frac{1}{2})^3)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{7}{10}$ $S_9 = \frac{\frac{2}{5}(1 - (\frac{1}{2})^9)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2044}{2560}$
$\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$	$a_1 = \frac{2}{5}$	$r = 5$	$S_6 = \frac{\frac{2}{5}(1 - (5)^6)}{1 - 5} = \frac{7812}{5}$

نمودار زیر یک دنباله هندسی را مشخص می کند. با نوشتن سه جمله اول آن و محاسبه نسبت مشترک دنباله هندسی :
 الف) جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.
 ب) حاصل S_6 را به دست آورید.



الف) با توجه به نمودار، جملات دنباله :

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

$$r = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 2 \quad \rightarrow \quad a_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$S_{10} = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1023}{256}$$

ب)