



دنیالہ ہندسی (قسمت دوم)

صفحہ ۹۱ جزوہ



دبیر: اصغر قیاسی

واسطه هندسی (میانگین هندسی):

اگر a ، b ، c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشد b را واسطه هندسی بین a و c می گوئیم و داریم:

$$b^2 = ac$$

اثبات:

$$a, b, c \xrightarrow{\substack{\text{دنباله} \\ \text{هندسی}}} \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \xrightarrow{\substack{\text{طرفین} \\ \text{وسطین}}} b^2 = ac$$

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \dots$$

مثال:

مقدار x را طوری تعیین کنید که عبارت های زیر جملات متوالی یک دنباله هندسی باشد

$$x, x + 5, 4x$$

$$b^2 = ac \longrightarrow (x + 5)^2 = (x)(4x) \longrightarrow x^2 + 10x + 25 = 4x^2 \longrightarrow 0 = 4x^2 - x^2 - 10x - 25$$
$$\longrightarrow 3x^2 - 10x - 25 = 0 \longrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 100 + 300 = 400$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{400}}{6} = \frac{10 \pm 20}{6} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = \frac{-5}{3} \end{cases}$$

واسطه های هندسی:

جمله های بین دو جمله غیر متوالی دنباله هندسی را واسطه های هندسی بین آن دو جمله می گوئیم

مثال: در مثال قبل بین ۳ و ۱۹۲ پنج واسطه هندسی داریم
۳، ۶، ۱۲، ۲۴، ۴۸، ۹۶، ۱۹۲

مثال: بین ۳ و ۳۷۵ دو واسطه حسابی درج کنید.

$$3 \quad - \quad - \quad 375 \longrightarrow a_4 = a \times r^{4-1} \longrightarrow 375 = 3 \times r^3 \longrightarrow r^3 = \frac{375}{3} = 125 \longrightarrow r = 5$$

3 15 75 375

نکته:

برای درج m واسطه بین a و b می توان قدر نسبت (نسبت مشترک) را از رابطه زیر به دست آورد

$$r^{m+1} = \frac{b}{a} \quad (\text{a جمله اول و b جمله آخر})$$

نکته: هرگاه از طرفین ریشه زوج بگیریم یک طرف \pm می گذاریم
مثال: بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید.

$$r^{3+1} = \frac{48}{3} = 16 \longrightarrow r^4 = 16 \longrightarrow r = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2 \longrightarrow \begin{cases} r = 2 \rightarrow 3, 6, 12, 24, 48 \\ r = -2 \rightarrow 3, -6, 12, -24, 48 \end{cases}$$

**مثال: در یک دنباله هندسی جمله نهم ۳۲ و جمله پنجم ۲ می باشد. دنباله را مشخص کنید
(a و r را تعیین کنید)**

$$\begin{cases} a_9 = 32 \\ a_5 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ar^8 = 32 \\ ar^4 = 2 \end{cases} \longrightarrow \frac{ar^8}{ar^4} = \frac{32}{2} \rightarrow r^4 = 16 \rightarrow r = \pm 2$$

$$ar^4 = 2 \rightarrow a(16) = 2 \rightarrow a = \frac{2}{16} \rightarrow a = \frac{1}{8}$$

نکته:

اگر دو جمله دلخواه از دنباله معلوم باشد با استفاده از رابطه زیر می توان قدر نسبت (نسبت مشترک) را حساب کرد

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$$

در مثال بالا می توان قدر نسبت را به صورت زیر پیدا کرد و سپس بقیه راه حل را ادامه داد.

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n} \rightarrow r^{9-5} = \frac{a_9}{a_5} \rightarrow r^4 = \frac{32}{2} = 16 \rightarrow r = \pm 2$$