

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الگوهای غیر خطی
دنیاله هندسی

صفحات ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ جزوه



منطقه ۱۶
دفتری

فرهنگستان

دبیرستان

دبیر: اصغر قیاسی

تعریف :

دنباله ای که هر جمله ی آن به جز جمله اول از ضرب شدن مقدار ثابتی در جمله قبلی به دست آید.
یا
تقسیم هر جمله به جمله ی قبلی عدد ثابتی باشد

مقدار ثابت را نسبت مشترک یا قدر نسبت می گوئیم . نسبت مشترک را با r نمایش می دهیم .
(برای به دست آوردن قدر نسبت کافی است یک جمله را بر جمله قبلی تقسیم کنیم)

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$3, 6, 12, 24, 48, \dots \rightarrow r = \boxed{2}$$

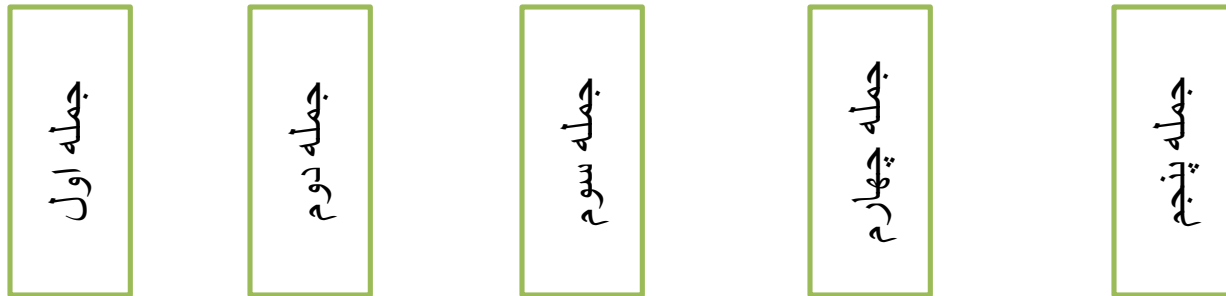
$$2, -6, 18, -54, 162, \dots \rightarrow r = \boxed{-3}$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \rightarrow r = \boxed{\frac{1}{2}}$$

جمله عمومی دنباله هندسی (ضابطه تابعی)

(وقتی جمله اول و قدر نسبت معلوم باشد با ضرب کردن های متوالی می توان جمله ها را نوشت)

$$a \xrightarrow{\times r} ar \xrightarrow{\times r} ar^2 \xrightarrow{\times r} ar^3 \xrightarrow{\times r} ar^4 \rightarrow \dots$$



هر جمله حاصل ضرب جمله اول در توانی از r می باشد مقدار توان یک واحد کمتر از شماره جمله می باشد یعنی در جمله دهم توان r برابر نه می باشد. پس برای جمله n ام داریم:

$$a_n = ar^{n-1}$$

مثال: جمله دهم دنباله ی هندسی زیر را مشخص کنید:

3, 6, 12, 24, 48, ...

$$a_{10} = ar^{10-1} = 3 \times 2^9 = 3 \times 512 = 1536$$

ضابطه بازگشتی دنباله هندسی:

با توجه به تعریف دنباله هندسی و ساختاری که برای ضابطه بازگشتی داریم برای دنباله هندسی داریم:

$$a_1, a_{n+1} = ra_n \quad \text{یا} \quad a_1, \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

مثال:

$$2, -6, 18, -54, 162, \dots$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = -3a_n \end{cases}$$

ضابطه بازگشتی:

ضابطه تابعی:

$$r = -3, a_n = ar^{n-1} = 2 \times (-3)^{n-1}$$

$$\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$$

ضابطه بازگشتی: $r = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ **ضابطه تابعی:**

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2}a_n \end{cases}$$

$$a_n = ar^{n-1} = \sqrt{2} \times (\sqrt{2})^{n-1} = \sqrt{2}^{1+n-1} = \sqrt{2}^n$$

نیمه عمر:

مدت زمانی که طول می کشد تا یک مقدار اولیه نصف شود نیمه عمر می گوئیم
نیمه عمر برای دارو ، مواد رادیواکتیو و هر چیز دیگری که با آهنگ ثابتی در حال کم شدن باشد استفاده می شود.

$$\text{مقدار اولیه (A)} \xleftarrow{\text{یک دوره}} (\%50A) \xleftarrow{\text{یک دوره}} (\%25A) \xleftarrow{\text{یک دوره}} (\%12/5A) \dots$$

مثال: اگر ۱۰۰ میلی گرم دارو با نیمه عمر یک ساعت مصرف شود در هر ساعت مقدار دارو را تعیین کنید.

بعد از یک ساعت ۵۰ بعد از دو ساعت ۲۵ بعد از سه ساعت ۱۲/۵

-یادآوری کاهش یک مقدار با درصد ثابت:

درصد گفته شده را بر ۱۰۰ تقسیم می کنیم و جواب را از ۱ کم می کنیم در هر مرحله مقدار قبلی را در این عدد ضرب می کنیم

(مثلا) وقتی گفته می شود ۲۰ درصد کاهش داریم یعنی در هر مرحله در ۸/۰ ضرب می کنیم
(مثلا) وقتی گفته می شود ۱۰ درصد کاهش داریم یعنی در هر مرحله در ۹/۰ ضرب می کنیم

-اگر در دنباله هندسی قدر نسبت بزرگتر از ۱ باشد دنباله صعودی است ($a > 0$)

-اگر در دنباله هندسی قدر نسبت ۱ باشد دنباله ثابت است ($a > 0$)

-اگر در دنباله هندسی قدر نسبت بین صفر و یک باشد دنباله نزولی است ($a > 0$)

مثال: در هر یک از حالت‌های زیر جمله عمومی و ضابطه بازگشتی را بنویسید:

$$a_1 = 1, r = \frac{1}{3}$$

(الف)

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n \quad \text{و} \quad a_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}}$$

$$a_1 = \frac{1}{81}, r = \frac{3}{2}$$

(ب)

$$a_1 = \frac{1}{81}, a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n \quad \text{و} \quad a_n = \frac{1}{81} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^4} \times \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{3^{n-5}}{2^{n-1}}$$

$$a_1 = 4, r = -\frac{1}{2}$$

(ج)

$$a_1 = 4, a_{n+1} = -\frac{1}{2} a_n \quad \text{و} \quad a_n = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

جمله اول	نسبت مشترک	پنج جمله اول	ضابطه بازگشتی	جمله عمومی دنباله
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{3}$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
$a_1 = \frac{1}{81}$	$r = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{81}, \frac{1}{54}, \frac{1}{36}, \frac{1}{24}, \frac{1}{16}$	$a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n$ $a_1 = \frac{1}{81}$	$a_n = \frac{1}{81} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
$a_1 = 4$	$r = -\frac{1}{2}$	$4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	$a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)a_n$ $a_1 = 4$	$a_n = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{5}$	$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$	$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$
$a_1 = 100$	$r = \frac{1}{4}$	$100, 25, \frac{25}{4}, \frac{25}{16}, \frac{25}{64}$	$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$ $a_1 = 100$	$a_n = 100 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

مثال: اگر $a_n = 100 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ **جمله عمومی یک دنباله هندسی باشد جملات دنباله و ضابطه بازگشتی**

آنها تعیین کنید

توضیح: به جای n اعداد ۱، ۲؛ ۳؛ ... را قرار می دهیم تا جمله های اول؛ دوم؛ سوم و ... پیدا شود.

$$a_1 = 100 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{1-1} = 100 \times 1 = 100 \quad a_2 = 100 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{2-1} = 100 \times \frac{1}{4} = 25$$

$$a_3 = 100 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{3-1} = 100 \times \frac{1}{16} = \frac{100}{16} = \frac{25}{4}$$

توضیح: با مقایسه فرمول داده شده با جمله عمومی دیده می شود که به جای جمله اول عدد ۱۰۰ و

$$100 \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} 25 \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} \frac{25}{4} \rightarrow \dots$$

به جای قدر نسبت $\frac{1}{4}$ قرار گرفته است. پس داریم:

ضابطه بازگشتی:

$$a_1 = 100 \quad a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n$$

شخصی یک یخچال فریزر به قیمت ۹۶۰ هزار تومان (!!!) خریده است هزینه استهلاک این کالا هر سال ۱۰ درصد سال پیش است. ضابطه تابع ارزشی یخچال را بنویسید. بعد از چند سال ارزش یخچال کمتر از ۴۸۰ هزار تومان می شود؟

* چون ۱۰ درصد کم می شود برای به دست آوردن سال بعد امسال را در $\frac{90}{100}$ ضرب می کنیم.

$$V_1 = 960000 \times \frac{90}{100} = 960000 \times 0.9 = 864000 \quad V_2 = 864000 \times 0.9 = 777600$$

$$V_3 = 777600 \times 0.9 = 699840 \quad \dots$$

$$V_n = V_1 \times r^{n-1} = 864000 \times (0.9)^{n-1}$$

با جایگذاری اعداد طبیعی در n داریم:

:

$$V_6 = 864000 \times (0.9)^{6-1} = 864000 \times (0.9)^5 = 510183.36$$

$$V_7 = 864000 \times (0.9)^{7-1} = 864000 \times (0.9)^6 = 459165.024$$

بنابراین ۷ سال پس از خرید یخچال فریزر باید آن را بفروشد تا ارزش آن کمتر از نصف قیمت خریداری

شده باشد.

هرگاه در هر مرحله k واحد کسر گردد یک دنباله حسابی داریم.
 هرگاه در هر مرحله k درصد از آن کسر گردد دنباله هندسی داریم.

مثال: نیمه عمر کافئین شش ساعت است. یک لیوان چای سیاه یا قهوه ۸۰ میلی گرم کافئین دارد پس از چند نیمه عمر یا چند ساعت یک شخص می تواند دوباره چای مصرف کند (اگر مقدار کافئین کمتر از ۰/۵ میلی گرم باشد هیچ وابستگی در بدن ایجاد نمی شود) (معناد نمی شویم)

پس از ۸ نیمه عمر یعنی : ساعت $6 \times 8 = 48$

$$80 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 2.5 \rightarrow 1.25 \rightarrow 0.625 \rightarrow 0.3125$$

$$\begin{cases} a_1 = 40 \\ r = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow a_n = 40 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_8 = 40 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 40 \times \frac{1}{128} = 0.3125$$